2010年　EJU 第1回　大問4問2の問題

問 2　曲線 $y = 2\cos 2x$ と曲線 $y = 4\cos x + k$ は，$x = a$ $\left(0 < a \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ で共通の接線をもつとする。

(1)　$f(x) = 2\cos 2x$，$g(x) = 4\cos x + k$ とおく。題意より，2 つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ は $x = a$ で共通の接線をもつから

$$f'(a) = g'(a), \quad f(a) = g(a)$$

である。

$f'(a) = g'(a)$ と $0 < a \leqq \dfrac{\pi}{2}$ から $a = \dfrac{\pi}{\boxed{\mathsf{O}}}$ であり，$f(a) = g(a)$ から $k = -\boxed{\mathsf{P}}$ を得る。

したがって，接点の座標は $\left(\dfrac{\pi}{\boxed{\mathsf{O}}},\ -\boxed{\mathsf{Q}}\right)$ であり，共通の接線の方程式は

$$y = -\boxed{\mathsf{R}}\sqrt{\boxed{\mathsf{S}}}\left(x - \frac{\pi}{\boxed{\mathsf{T}}}\right) - \boxed{\mathsf{U}}$$

である。

(2)　$-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲において，この 2 つの曲線で囲まれた部分の面積 S を求めよう。

2 つの曲線はともに y 軸に関して対称であるから，$b = \boxed{\mathsf{V}}$，$c = \dfrac{\pi}{\boxed{\mathsf{O}}}$ として

$$S = \boxed{\mathsf{W}}\int_b^c (2\cos 2x - 4\cos x - k)\,dx$$

であり，これを計算して

$$S = \boxed{\mathsf{X}}\pi - \boxed{\mathsf{Y}}\sqrt{\boxed{\mathsf{Z}}}$$

を得る。