II

半径が 2 の円 O に内接する三角形 ABC が

$$3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} = \vec{0} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

を満たしているとする。

直線 AO と線分 BC の交点を D とおくとき，線分 AD と線分 BD の長さを求めよう。

(1)　k を実数として，$\overrightarrow{OD} = k\overrightarrow{OA}$ とおくと

$$\overrightarrow{OD} = -\frac{\boxed{\mathsf{A}}}{\boxed{\mathsf{B}}}k\overrightarrow{OB} - \frac{\boxed{\mathsf{C}}}{\boxed{\mathsf{D}}}k\overrightarrow{OC}$$

と表すことができる。さらに，3 点 B, C, D が一直線上にあることから，$k = \frac{\boxed{\mathsf{EF}}}{\boxed{\mathsf{G}}}$

を得る。したがって，OD $= \boxed{\mathsf{H}}$ が求まり

$$\mathrm{AD} = \boxed{\mathsf{I}}$$

を得る。

(2)　(1) より $\mathrm{BD} = \frac{\boxed{\mathsf{J}}}{\boxed{\mathsf{K}}}\mathrm{BC}$ となるので，線分 BD の長さを求めるためには，線分 BC の長さを求めればよい。

まず

$$\mathrm{BC}^2 = \boxed{\mathsf{L}} - \boxed{\mathsf{M}}\,\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$$

である。ただし，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$ は $\overrightarrow{OB}$ と $\overrightarrow{OC}$ の内積を表すものとする。また，① より，$\left|4\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}\right|^2 = \boxed{\mathsf{NO}}$ であるから

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = \frac{\boxed{\mathsf{PQR}}}{\boxed{\mathsf{S}}}$$

を得る。したがって，$\mathrm{BC} = \frac{\boxed{\mathsf{T}}\sqrt{\boxed{\mathsf{U}}}}{\boxed{\mathsf{V}}}$ が求まり

$$\mathrm{BD} = \frac{\sqrt{\boxed{\mathsf{W}}}}{\boxed{\mathsf{X}}}$$

を得る。