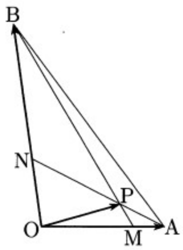
## III

三角形 OAB を考える。辺 OA を 3 : 1 に内分する点を M，辺 OB を 1 : 2 に内分する点を N とし，線分 AN と線分 BM の交点を P とする。




(1)　ベクトル $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ とおくとき，ベクトル $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表すことを考える。

$$\mathrm{AP}:\mathrm{PN} = s:(1-s) \qquad (0 < s < 1)$$
$$\mathrm{BP}:\mathrm{PM} = t:(1-t) \qquad (0 < t < 1)$$

とおくと

$$\overrightarrow{OP} = (\boxed{\text{A}} - s)\vec{a} + \frac{\boxed{\text{B}}}{\boxed{\text{C}}} s\vec{b}$$
$$= \frac{\boxed{\text{D}}}{\boxed{\text{E}}} t\vec{a} + (\boxed{\text{F}} - t)\vec{b}$$

が成り立つから

$$s = \frac{\boxed{\text{G}}}{\boxed{\text{H}}}, \quad t = \frac{\boxed{\text{I}}}{\boxed{\text{J}}}$$

である。したがって，$\overrightarrow{OP}$ は $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\boxed{\text{K}}}{\boxed{\text{L}}}\vec{a} + \frac{\boxed{\text{M}}}{\boxed{\text{N}}}\vec{b}$$

と表される。

（問は次ページに続く）

(2)　$\mathrm{OA}=6$, $\mathrm{OB}=9$ のとき，線分 OP の長さと $\angle\mathrm{AOB}$ の大きさとの関係を調べよう。

OP の長さを $\ell$ とおくとき，$\ell^2$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を用いて表すと

$$\ell^2 = \frac{\boxed{\mathsf{O}}}{\boxed{\mathsf{PQ}}}\,\vec{a}\cdot\vec{b} + \boxed{\mathsf{RS}}$$

を得る。

したがって，例えば，$\ell = 4$ のとき

$$\cos\angle\mathrm{AOB} = \frac{\boxed{\mathsf{TU}}}{\boxed{\mathsf{V}}}$$

である。

一方，$\angle\mathrm{AOB}$ の大きさを変えるとき，$\ell$ のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\mathsf{W}} < \ell < \boxed{\mathsf{X}}$$

である。