$\boxed{\text{III}}$

次の 2 つの方程式

$$(\log_4 2\sqrt{x})^2 + (\log_4 2\sqrt{y})^2 = \log_2(\sqrt[4]{2} \cdot x\sqrt{y}) \quad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

$$\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[4]{y} = 2^k \quad \cdots\cdots\cdots \quad ②$$

を考える。①, ② を同時に満たす正の実数 x, y が存在するとき，定数 k のとり得る値の範囲を求めよう。

$\log_2 x = X$, $\log_2 y = Y$ とおき，①, ② を X, Y を用いて表す。まず，① を考えよう。

$$\log_4 2\sqrt{x} = \frac{\log_2 x + \boxed{\text{A}}}{\boxed{\text{B}}}$$

および

$$\log_2(\sqrt[4]{2} \cdot x\sqrt{y}) = \frac{\boxed{\text{C}}}{\boxed{\text{D}}} + \log_2 x + \frac{\log_2 y}{\boxed{\text{E}}}$$

より，① は

$$\left(X - \boxed{\text{F}}\right)^2 + \left(Y - \boxed{\text{G}}\right)^2 = \boxed{\text{HI}} \quad \cdots\cdots\cdots \quad ③$$

となる。② も同様にして

$$4X + \boxed{\text{J}}\,Y = \boxed{\text{KL}}\,k \quad \cdots\cdots\cdots \quad ④$$

となる。

XY 平面上で考えると，円 ③ の中心から直線 ④ への距離 d は

$$d = \frac{\left|\boxed{\text{MN}} - \boxed{\text{OP}}\,k\right|}{\boxed{\text{Q}}}$$

であるから，k のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{R}} \leqq k \leqq \boxed{\text{S}}$$

である。