

III

正の数 x, y が

$$(\log_2 x)^2 + (\log_2 y)^2 = \log_2 \frac{8x^2}{y^2} \quad \dots\dots\dots \text{①}$$

を満たしながら変わるとき、 xy^2 の最大値 およびそのときの x, y の値を求めよう。

(1) ① の右辺は

$$\log_2 \frac{8x^2}{y^2} = \boxed{\text{A}} \log_2 x - \boxed{\text{B}} \log_2 y + \boxed{\text{C}}$$

と変形できる。

したがって、 $\log_2 x = X$, $\log_2 y = Y$ とおくと、① は X, Y を用いて

$$(X - \boxed{\text{D}})^2 + (Y + \boxed{\text{E}})^2 = \boxed{\text{F}} \quad \dots\dots\dots \text{②}$$

と表せる。

(2) $\log_2 xy^2 = k$ とおく。この式は (1) の X, Y を用いて

$$X + \boxed{\text{G}} Y - k = 0 \quad \dots\dots\dots \text{③}$$

と表せる。

ここで、 XY 平面を考えると、② のグラフは円、③ のグラフは直線となる。 k が最大になるのは、その円と直線が接するときである。よって、 $k = \boxed{\text{H}}$ のとき、 xy^2 は最大値 $\boxed{\text{IJ}}$ をとる。また、このとき $x = \boxed{\text{K}}$, $y = \boxed{\text{L}}$ である。